

1 章 序論

原田研究室では、2016～2017年度に、万華鏡の研究を行っていた。複数の学生による、立体万華鏡、投影万華鏡、液体万華鏡など、様々な万華鏡の特徴、作成方法、原理などの研究記録が残っている。また、その過程で、レンズの仕組みの解明が必要となり、レンズメーカーの式(1)の導出なども行っていた。本卒業研究では、レンズの仕組みの解明をさらに進めていくものとする。また、近年、原田研究室では、主に中学校理科における日本と海外の教科書や方向性に関する卒業研究を行っている。これらの研究を参考にし、本研究で扱うレンズの仕組みと関わりの深い、中学校理科第一学年物理分野『光と音』の単元の教材研究とも関連付け、研究を進める。

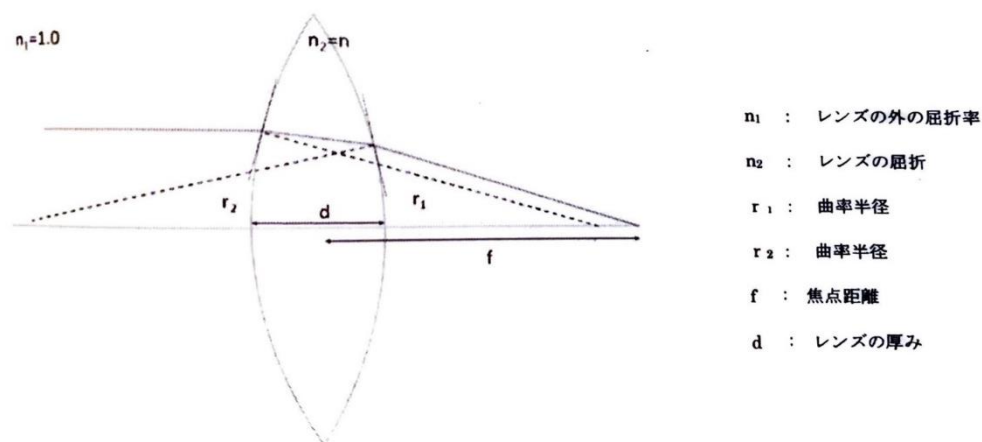
レンズの仕組みについて解明を進めることで、万華鏡の原理をより深く理解し、より様々な万華鏡の研究や、開発に役立てることができると考えている。また、中学校理科第一学年物理分野『光と音』と関連付けて研究することで、当单元についての理解を深めるとともに、開発した教材を、実際に中学校理科の授業で活用することができると考える。

2 章 研究方法

レンズの仕組みに加え、より詳しく記述すべき原理等について、論文等の資料を活用して調べ、必要な式などの導出を試みる。

3 章 結果と考察

レンズメーカーの式の証明

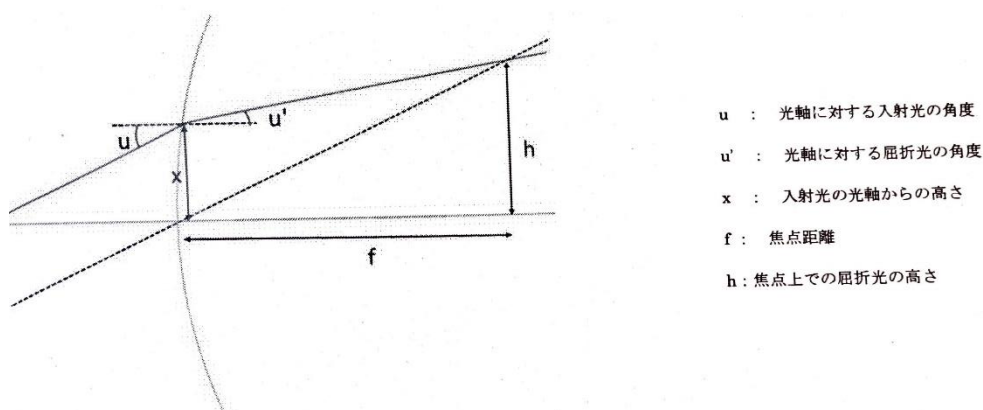


焦点距離 f と、レンズ外の媒質の屈折率 n_1 とレンズの屈折率 n_2 (ここでは、空気中のレンズについて考えるため、 $n_1=1.0$, $n_2=n$ とする。), レンズの曲率半径 r_1 , r_2 , レンズの厚み d の関係は次のように表される。

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{d(n - 1)^2}{nr_1r_2}$$

これをレンズメーカーの式と呼ぶ。

まず、レンズの中央を通る光線と、その光線と並行であり、高さ x の位置でレンズに入る光線に考える。このとき、入射角が十分小さいことを仮定する。



レンズから射出して進む光線について考える。光線は光軸に対して角度 u' 、高さ x を持つ。この光線が z だけ進んだ時の光軸からの高さ x' は次のように表すことができる。

$$x' = x + z \tan u'$$

この式を行列によって表す。光線の高さと傾きをベクトル表示し、 $(x, \tan u)$ と表す。

$$\begin{pmatrix} x' \\ \tan u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tan u \end{pmatrix}$$

このうち、

$$T(z) = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を移行行列と呼ぶ。

次に、光線がレンズを通り屈折して進むとき、光線の光軸からの高さの変化を考える。レンズの中心を通る光線は屈折せずに曲がるため、この光線が f 進んだ時の高さ h は、次のように表すことができる。

$$h = f \tan u$$

ここで、傾き u で入射した光はすべて $f u$ の高さで交わるので、次の式が成り立つ。

$$f \tan u = x + \tan u'$$

この式を整理して、

$$\tan u' = \tan u - \frac{x}{f}$$

レンズの焦点距離の逆数（パワー）を

$$\frac{1}{f} = P$$

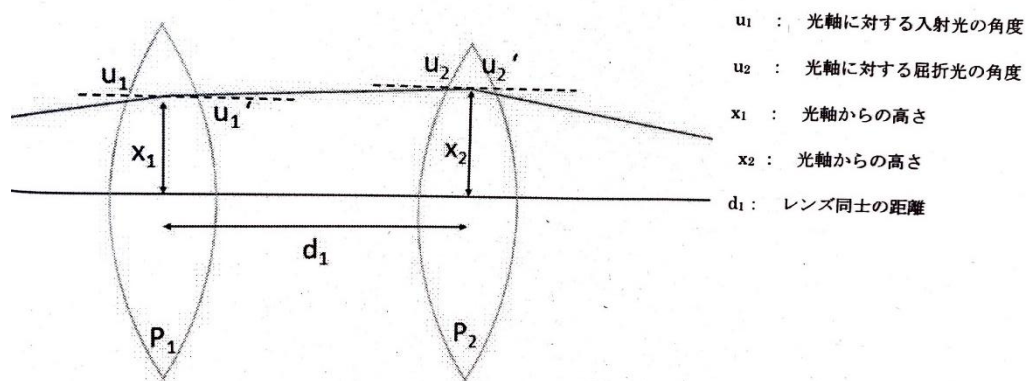
と表すと、レンズに入射したときの光線のベクトルを $(x, \tan u)$ 、屈折後の光線のベクトルを $(x, \tan u')$ としたとき、次のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} x \\ \tan u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tan u \end{pmatrix}$$

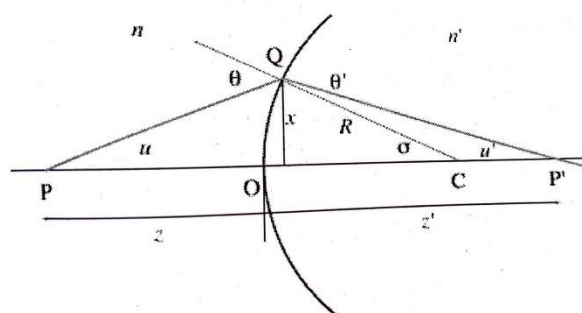
このうち、

$$R(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix}$$

を屈折行列と呼ぶ。



続いて、この薄型レンズの複合レンズについて考える。レンズの間の距離を d_1 とし、左のレンズのパワーを $P_1 = \frac{1}{f_1}$, 右のレンズのパワーを $P_2 = \frac{1}{f_2}$ とする。



図中で $u > 0$ としたとき、 $u' < 0$, $\sigma < 0$ である。また、 θ , θ' は共に正である。符号を考慮すると、 θ と θ' は

$$\theta = u - \sigma$$

$$\theta' = u' - \sigma$$

と表すことができる。

また、

$$\sin \sigma = -\frac{x}{R}$$

スネルの法則により、

$$n \sin \theta = n' \sin \theta'$$

$$n \sin(u - \sigma) = n' \sin(u' - \sigma)$$

ここで、角度 θ が十分小さい場合に用いることができるマクローリン式展開による三角比の近似

$$\sin \theta = \theta$$

を用いると、

$$n(u - \sigma) = n'(u' - \sigma)$$

これを整理して、

$$n'u' = nu - (n' - n)\sigma = \frac{(n' - n)}{R}x$$

が導かれる。これを行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} x' \\ n'u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ nu \end{pmatrix}$$

と表され、これにより球面のパワーは、

$$P = \frac{n' - n}{R}$$

であることが求められる。

第一レンズから順に光線を表すベクトルがどのように変換されているかを表で表すと、次のようになる。

第1レンズ 入射側	第1レンズ 射出側	第2レンズ 入射側	第2レンズ 射出側
$\begin{pmatrix} x_1 \\ \tan u_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ \tan u'_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_2 \\ \tan u_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_2 \\ \tan u'_2 \end{pmatrix}$
$= \mathbf{R}(P_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ \tan u_1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}(d_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ \tan u'_1 \end{pmatrix} = \mathbf{R}(P_2) \begin{pmatrix} x_2 \\ \tan u_2 \end{pmatrix}$			

この表から、入射光線と射出光線の関係は次のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \tan u'_2 \end{pmatrix} = \mathbf{R}(P_2)\mathbf{T}(d_1)\mathbf{R}(P_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ \tan u_1 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ \tan u_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{pmatrix}$$

この $\mathbf{M}$ を光線行列と呼ぶ。また、これを計算すると、

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 - d_1 P_1 & d_1 \\ -P_1 - P_2 + d_1 P_1 P_2 & 1 - d_1 P_2 \end{pmatrix}$$

入射部分の R を r_1 ，射出部分の R を r_2 ， $n=1$ ， $n'=n$ とすると， P_1 と P_2 は次のようになる。

$$P_1 = \frac{n-1}{r_1}$$

$$P_2 = \frac{1-n}{r_2}$$

また，この場合，光は空気中ではなくレンズ中を進むため，行路は $\frac{d}{n}$ であるので，これを代入すると

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{dP_1}{n} & \frac{d}{n} \\ -P_1 - P_2 + \frac{dP_1P_2}{n} & 1 - \frac{dP_2}{n} \end{pmatrix}$$

この二列一行目に代入し，－の符号を与えると，

$$(n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{d(n-1)^2}{nr_1r_2}$$

これはレンズメーカーの式の右辺と一致する。

4 章 結論

本研究を通して，主に凸レンズを通る光の進み方の特徴と，それを示す式の導出を行うことができた。光の進み方についてより深く理解することで，知見を広げ，小・中学校の授業における教材研究などに役立てることのできる力を身に着けることができた。

5 章 参考文献

光学 第3章 幾何光学